C–AVZ–O–TUUA

CS (Main) Exam:2015

सांख्यिकी
प्रश्न-पत्र—I
STATISTICS
Paper—I

निर्धारित समय : तीन घंटे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू०सी०ए०) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर-पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **Two Sections** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each Section.*

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—अ

SECTION—A

Q. 1(a) माना कि किसी परिवार में सही-सही n बच्चों के होने की प्रायिकता αp^n $(\alpha > 0, 0 < p < 1)$ है। मानिए कि किसी बच्चे का लड़का या लड़की होना बराबर प्रायिकता के साथ है।

(i) प्रायिकता प्राप्त कीजिए कि किसी परिवार में सटीक $k\ (\geq 1)$ लड़के हैं।

(ii) दिया गया है कि एक परिवार में कम से कम एक लड़का है, तो उस परिवार में दो या दो से अधिक बच्चे होने की क्या प्रायिकता है ?

Let the probability that a family has exactly n children be αp^n $(\alpha > 0, 0 < p < 1)$. Assume that a child can be a boy or a girl with equal probability.

(i) Obtain the probability that a family has exactly $k\ (\geq 1)$ boys.

(ii) Given that a family has at least one boy, what is the probability that there are two or more children in that family ? 10

Q. 1(b) बंटन में और माध्य में अभिसरण परिभाषित करिए। माना कि $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ स्वतन्त्र यादृच्छिक चरों का ऐसा अनुक्रम है कि

$$X_n = n^3, \ \frac{1}{n^2} \text{ प्रायिकता के साथ}$$

$$= 0, \ 1-\frac{1}{n^2} \text{ प्रायिकता के साथ}$$

दर्शाइये कि बंटन में $X_n \to 0$।

Define convergence in distribution and in mean. Let $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of independent random variables such that

$$X_n = n^3 \text{ with probability } \frac{1}{n^2}$$

$$= 0 \text{ with probability } 1-\frac{1}{n^2}$$

Show that $X_n \to 0$ in distribution. 10

Q. 1(c) पर्याप्त प्रतिदर्शज को परिभाषित कीजिए।

यदि X_1 और X_2 बर्नौली (p) यादृच्छिक चर हैं तो T_1 और T_2 की p के लिए पर्याप्तता परीक्षा कीजिए जहाँ $T_1 = X_1 + X_2$ और $T_2 = X_1 + 5X_2$.

Define a sufficient statistic.

If X_1 and X_2 are Bernoulli (p) random variables, examine the sufficiency of T_1 and T_2 for p where $T_1 = X_1 + X_2$ and $T_2 = X_1 + 5X_2$. 10

Q. 1(d) माना कि $X_1, X_2, ..., X_m$ और $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ क्रमश: $N(3, \sigma_1^2)$ और $N(2, \sigma_2^2)$ से स्वतन्त्र यादृच्छिक प्रतिदर्श हैं। $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ के लिए $1-\alpha$ विश्वसनीयता स्तर पर, विश्वसनीयता अन्तराल प्राप्त कीजिए।

Let $X_1, X_2, ..., X_m$ and $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ be independent random samples from $N(3, \sigma_1^2)$ and $N(2, \sigma_2^2)$ respectively. Find a confidence Interval for $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ at confidence level $1-\alpha$. 10

Q. 1(e) n प्रेक्षणों $X_1, X_2, ..., X_n$ को $B(1, \theta)$ से मानिए। θ के लिए द्विघाती हानि फलन के अन्तर्गत बेज आकलक प्राप्त कीजिए जबकि संयुग्मी पूर्व के लिए θ कल्पित हो।

Consider n observations $X_1, X_2, ..., X_n$ from $B(1, \theta)$. Obtain the Bayes estimator for θ under quadratic loss function when a conjugate prior is assumed for θ. 10

Q. 2(a) किसी यादृच्छिक चर के बंटन के असांतत्य बिन्दुओं को आप कैसे प्राप्त कर सकते हैं, यदि आपको लक्षण फलन $\phi(t)$ दिया गया है ? अत: यादृच्छिक चर X, जिसका लक्षण फलन $\frac{1}{4}(1+e^{it}+2e^{2it})$ है, के सी.डी.एफ. को प्राप्त कीजिए।

How can you find out the discontinuity points of distribution of a random variable if the characteristic function $\phi(t)$ is given to you ? Hence find the c.d.f. of a random variable X whose characteristic function is $\frac{1}{4}(1+e^{it}+2e^{2it})$. 20

Q. 2(b) माना कि X_n प्वायसाँ $P(n\theta)$, $n \geq 1$, $\theta > \theta$ है। केन्द्रीय सीमा प्रमेय का उपयोग, n का न्यूनतम मान प्राप्त करने के लिए कीजिए ताकि

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-\theta\right| \leq \frac{\sqrt{\theta}}{10}\right) \geq .99.$$

Let X_n be a Poisson $P(n\theta)$, $n \geq 1$, $\theta > 0$. Use the Central Limit Theorem to find the smallest n such that

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-\theta\right| \leq \frac{\sqrt{\theta}}{10}\right) \geq .99.$$

15

Q. 2(c) निराकरणीय परिकल्पना के अन्तर्गत, X का बंटन 1, 2, ..., 10 पर एकसमान और वैकल्पिक परिकल्पना के अन्तर्गत बंटन $P\{X = k\} = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$ के लिए, $P\{X=k\}=\frac{1}{8}$, $k = 5, 6, 7, 8, 9$ के लिए और $P\{X=10\}=\frac{3}{8}$ हैं। 0.15 आमाप का सर्वशक्तिमान परीक्षण प्राप्त कीजिए और एक आमाप के प्रतिदर्श के आधार पर, इसकी शक्ति को मालूम कीजिये।

The distribution under the null hypothesis of X is uniform over 1, 2, ..., 10 and under the alternative hypothesis, the distribution is given by $P\{X = k\} = 0$, for k = 1, 2, 3, 4, $P\{X=k\}=\frac{1}{8}$ for k = 5, 6, 7, 8, 9 and $P\{X=10\}=\frac{3}{8}$. Obtain most powerful test of size 0.15 and find its power, based on a sample of size one. 15

Q. 3(a) एक आज़माइश में प्रायिकता p_1, p_2 और p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$ के साथ तीन सम्भावित परिणामों में से कोई एक परिणाम आ सकता है। $H_0 : p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$ की वैकल्पिक कि ये प्रायिकताएं $\frac{1}{3}$ से भिन्न हैं, के विरुद्ध परीक्षा के लिए संभाविता अनुपात परीक्षण का निर्माण कीजिए। परीक्षा के n जांचों (Trials) पर आधारित होकर निर्मित करने की जरूरत है।

A trial can result in one of three possible outcomes with probabilities p_1, p_2 and p_3 $(p_1 + p_2 + p_3 = 1)$ respectively. Construct the Likelihood Ratio test of $H_0 : p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$ against the alternative that these probabilities are different from $\frac{1}{3}$. The test needs to be constructed on the basis of n-trials. 20

Q. 3(b) आघूर्ण आकलकों को कोई कैसे प्राप्त करता है ?

यदि X का पी.डी.एफ. निम्नलिखित हो,

$$f_X(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{(x-\beta)}{\theta}}, \quad 0 < \beta < x < \infty, \ \theta > 0$$

और 50 लब्धियों के आमाप का प्रतिदर्श

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 8200 \text{ और } \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 20,00,000$$

देता है, तो θ और β का आघूर्ण आकलकों को प्राप्त कीजिए।

How does one obtain moment estimators ? If X has the pdf

$$f_X(x) = \frac{x}{\theta} e^{-\frac{(x-\beta)}{\theta}}, \quad 0 < \beta < x < \infty, \ \theta > 0$$

and a sample of size 50 yields

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 8200 \text{ and } \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 20,00,000$$

find moment estimators of θ and β. 15

Q. 3(c) $H_0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \ -\infty < x < \infty$

की

$$H_1 : f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \ -\infty < x < \infty$$

के विरुद्ध परीक्षण के लिए सर्वाधिक शक्तिमान परीक्षण को n आमाप के यादृच्छिक प्रतिदर्श के आधार पर प्राप्त कीजिए। यहां f(x) यादृच्छिक चर X का पी.डी.एफ. है।

Find a Most Powerful test for testing

$$H_0 : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \ -\infty < x < \infty$$

versus

$$H_1 : f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \ -\infty < x < \infty$$

on the basis of a random sample of size n. Here f(x) is the pdf of the random variable X. 15

Q. 4(a) माना कि $F(\cdot)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{यदि } x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{(x-1)}{4} & \text{यदि } 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} + \frac{(x-2)}{8} & \text{यदि } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{यदि } x \ge 3 \end{cases}$$

द्वारा दिया गया संचयी बंटन फलन (सं.बं.फ.) है। F के असांतत्य बिन्दुओं के समुच्चय को निकालिए और F को उनके विविक्त और संतत भागों के मिश्रण के रूप में व्यक्त कीजिए।

Let $F(\cdot)$ be the cumulative distribution function (cdf) given by

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{(x-1)}{4} & \text{if } 1 \le x < 2 \\ \frac{7}{8} + \frac{(x-2)}{8} & \text{if } 2 \le x < 3 \\ 1 & \text{if } x \ge 3 \end{cases}$$

Find the set of discontinuity points of F and express F as a mixture of its discrete and continuous parts. 20

Q. 4(b) मानिए कि X और Y का सी.डी.एफ. क्रमश: F और G है। इन बंटनों से स्वतन्त्र यादृच्छिक प्रतिदर्श $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ और $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ दिये गये हों तो $H_0 : F(t) = G(t)$ सभी t के लिए, की वैकल्पिक $F(t) > G(t)$ कम से कम एक t के लिए, के विरुद्ध परीक्षा के लिए मान-व्हीटनी परीक्षा का निर्माण कीजिए। जब वैकल्पिक $F(t) \neq G(t)$ कुछ t के लिए परीक्षा को भी इंगित करिए। उस परीक्षा को, जिसको आप जब m और n बड़े हैं तो प्रयुक्त करेंगे, बताइये।

Suppose that X and Y have cdf F and G respectively. Given independent random samples $(x_1, x_2, \ldots x_m)$ and $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ from these distributions, construct Mann-Whitney test of $H_0 : F(t) = G(t)$ for all t against the alternative that $F(t) > G(t)$ for at least one t. Also indicate the test when the alternative is $F(t) \neq G(t)$ for some t. State the test you would use when m and n are large. 15

Q. 4(c) विचारिए λ प्राचल वाले प्वायसाँ बंटन से प्रेक्षणों को। $H_0 : \lambda = \lambda_0$ की $H_1 : \lambda = k\lambda_0, k > 1$ के विरुद्ध परीक्षण करने के लिए, अनुक्रमिक प्रायिकता अनुपात परीक्षण (SPRT) का विकास करिए। OC और ASN फलनों को प्राप्त कीजिए।

Consider observations from Poisson distribution with parameter λ. Develop a Sequential Probability Ratio Test (SPRT) to test $H_0 : \lambda = \lambda_0$ against $H_1 : \lambda = k\lambda_0, k > 1$. Obtain OC and ASN functions. 15

खण्ड—ब

SECTION—B

Q. 5(a) द्विचर प्रसामान्य समष्टि से 4 आमाप का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श निम्नलिखित आंकड़े प्रदान करता है

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

जहाँ $\overline{X}$ प्रतिदर्श माध्य और S समष्टि प्रसरण आव्यूह का अनभिनत आकलक है। परिकल्पना $H_0 : \underset{\sim}{\mu} = (5,5)'$, जहाँ μ समष्टि माध्य सदिश है, का परीक्षण कीजिए।

$(F_{.05, 1, 3} = 10.13, \; F_{.05, 2, 2} = 19.00, \; F_{.05, 3, 1} = 215.7)$

A random sample of size 4 from a bivariate normal population provides the following statistics

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \; S = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

where $\overline{X}$ is the sample mean and S is an unbiased estimator of the population dispersion matrix.

Test the hypothesis $H_0 : \underset{\sim}{\mu} = (5,5)'$ where μ is the population mean vector.

$(F_{.05, 1, 3} = 10.13, \; F_{.05, 2, 2} = 19.00, \; F_{.05, 3, 1} = 215.7)$ 10

Q. 5(b) माना $X = (X_1, X_2 \ldots\ldots X_p)'$ $E(X) = 0$, $V(X) = \Sigma$ के साथ p-आयामी यादृच्छिक सदिश है। X_1 और X_2 के मध्य आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक $\rho_{12.(3.....p)}$ की परिभाषा दीजिए। दर्शाइये कि

$$\rho^2_{12.(3....p)} = \frac{(\sigma^{12})^2}{\sigma^{11}\sigma^{22}}$$

जहां σ^{ij} Σ^{-1} का (i, j)वाँ अवयव है।

Let $X = (X_1, X_2 \ldots\ldots X_p)'$ be a p-dimensional random vector with $E(X) = 0$, $V(X) = \Sigma$. Define partial correlation coefficient $\rho_{12.(3.....p)}$ between X_1, X_2. Show that

$$\rho^2_{12.(3....p)} = \frac{(\sigma^{12})^2}{\sigma^{11}\sigma^{22}}$$

where σ^{ij} is the $(i, j)^{th}$ element of Σ^{-1}. 10

Q. 5(c) विचारिए समान प्रसरण σ^2 और $E(Y_1) = \beta_1 + \beta_3$, $E(Y_2) = \beta_1 + \beta_2$, $E(Y_3) = \beta_1 + \beta_3$ रखने वाले तीन स्वतन्त्र यादृच्छिक चरों Y_1, Y_2 और Y_3 को। रैखिक प्राचलीय फलन $l'\beta$ के आकलनीयता की दशा का निर्धारण करिए। सामान्य समीकरण का हल और त्रुटि वर्ग योग प्राप्त कीजिए।

Consider three independent random variables Y_1, Y_2 and Y_3 having common variance σ^2 and $E(Y_1) = \beta_1 + \beta_3$, $E(Y_2) = \beta_1 + \beta_2$, $E(Y_3) = \beta_1 + \beta_3$. Determine the condition of estimability of the linear parametric function $l'\beta$. Obtain a solution of the normal equation and the S.S. due to error. 10

Q. 5(d) दर्शाइये कि

$$V_{ran} = V_{prop} + \frac{N-n}{nN(N-1)}\left[\sum_h N_h(\bar{Y}_h - \bar{Y})^2 - \frac{1}{N}\sum_h (N - N_h)S_h^2\right]$$

जहां V_{ran} और V_{prop} क्रमशः सरल यादृच्छिक प्रतिचयन और आनुपातिक निर्धारण के साथ स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन के अन्तर्गत आकलित माध्यों के प्रसरण हैं। अन्य सभी संकेताक्षरों के अपने प्रचलित अर्थ निर्वचन हैं।

Show that

$$V_{ran} = V_{prop} + \frac{N-n}{nN(N-1)}\left[\sum_h N_h(\bar{Y}_h - \bar{Y})^2 - \frac{1}{N}\sum_h (N - N_h)S_h^2\right]$$

where V_{ran} and V_{prop} are respectively the variances of the estimated means under simple random sampling and stratified random sampling with proportional allocation. All other notations have their usual interpretations. 10

Q. 5(e) पूर्ण संकरण प्रयुक्त करते हुए 4 पुनरावृत्तियों (3 खण्डक प्रति पुनरावृत्ति के साथ) में 3^3-प्रयोग के खाके (ले आउट) का वर्णन करिए।

Describe the layout of a 3^3 experiment in 4 replicates (with 3 blocks per replicate) using complete confounding. 10

Q. 6(a) धनात्मक द्वितीय क्रम की सम्मिलन प्रायिकता के साथ मनचाहे निश्चित प्रभावी आमाप प्रतिदर्श अभिकल्पना के लिए, सीमित-समष्टि योग के हारविज़-थाम्पसन आकलक के प्रसरण का येट्स-ग्रुन्डी रूप को व्युत्पन्न कीजिए और अत: इस प्रसरण का येट्स-ग्रुन्डी अनभिनत आकलक प्राप्त कीजिए।

For an arbitrary fixed effective size sampling design with positive second order inclusion probabilities, derive the Yates-Grundy form of the variance of the Horvitz-Thompson estimator of a finite population total and hence obtain the Yates-Grundy unbiased estimator of this variance. 20

Q. 6(b) माना कि $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ संयुक्त आघूर्णजनक फलन (आ.घू.फ.)

$$M_X(\underset{\sim}{t}) = \exp\left[t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{t_2^2}{2} + 2t_3^2 - \frac{t_1 t_2}{2} - t_1 t_3\right]$$

जहां $\underset{\sim}{t} = (t_1, t_2, t_3)'$ तो

(i) $\underset{\sim}{X}$ का सहप्रसरण आव्यूह और माध्य सदिश प्राप्त कीजिए।

(ii) स्थिरांक C इस प्रकार प्राप्त कीजिए, ताकि $P(2X_1 - 3X_2 + X_3 > C) = 0.95$ ।

(iii) X_1 का, जबकि दिया गया है कि $X_2 = x_2$ और $X_3 = x_3$, प्रतिबन्धित बंटन ज्ञात कीजिए।

(यदि आवश्यकता हो तो आप $P(\tau > 1.645) = 0.05$ और $P(\tau > 1.96) = 0.01$, जहाँ τ मानक प्रसामान्य चर है, प्रयुक्त कर सकते हैं)

Let $\underset{\sim}{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ have the joint moment generating function (mgf)

$$M_X(\underset{\sim}{t}) = \exp\left[t_1 - t_2 + 2t_3 + t_1^2 + \frac{t_2^2}{2} + 2t_3^2 - \frac{t_1 t_2}{2} - t_1 t_3\right]$$

where $\underset{\sim}{t} = (t_1, t_2, t_3)'$. Then :

(i) Obtain the covariance matrix and the mean vector of $\underset{\sim}{X}$.

(ii) Find a constant C such that $P(2X_1 - 3X_2 + X_3 > C) = 0.95$.

(iii) Derive the conditional distribution of X_1 given $X_2 = x_2$ and $X_3 = x_3$.

(If necessary, you can use $P(\tau > 1.645) = 0.05$ and $P(\tau > 1.96) = 0.01$ where τ is a standard normal variate) 15

Q. 6(c) गॉस-मार्कोव माडल $(\underset{\sim}{Y}, X\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 I)$ के लिए, आकलक $\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y}$ $E(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y})$ का सर्वोत्तम-रैखिक-अनभिनत आकलक (BLUE) केवल और केवल तभी है जब $\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y}$ शून्य के सभी अनभिनत आकलकों से अ-सहसंबंधित है।

For the Gauss Markov Model $(\underset{\sim}{Y}, X\underset{\sim}{\beta}, \sigma^2 I)$, the estimator $\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y}$ is the best linear unbiased estimator (BLUE) for $E(\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y})$ iff $\underset{\sim}{t}'\underset{\sim}{Y}$ is uncorrelated with all unbiased estimators of zero. 15

Q. 7(a) संतुलित अपूर्ण खंडक डिजाइन (बी.आई.बी.डी.) की परिभाषा दीजिए। इसके अंत:खण्ड विश्लेषण को पूरा कीजिए।

Define a balanced incomplete block design (BIBD). Carry out its intrablock analysis. 20

Q. 7(b) मानिए कि एक यादृच्छिक सदिश $\underset{\sim}{X}$ का सहप्रसरण आव्यूह $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ है। $\underset{\sim}{X}$ के प्रधान घटकों को मालूम कीजिए और प्रथम दो प्रधान घटकों के कारण कुल प्रसरण का अंश प्राप्त कीजिए।

Suppose a random vector $\underset{\sim}{X}$ has the covariance matrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Find the principal components of $\underset{\sim}{X}$ and obtain the proportion of the total variance accounted for by the first two principal components. 15

Q. 7(c) विचारिए साधारण रैखिक मॉडल $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$. दर्शाइये कि यदि x_i समान दूरी पर स्थित हों (अर्थात् $x_i = u + iv$, u और v के निश्चित मानों के लिए), तो $y_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + e_i$ एक समतुल्य पुनर्प्राचलीकरण है। दोनों डिजाइन आव्यूह का एक ही स्तम्भ दिक्काल हैं के अर्थ में)

Consider the simple linear regression model $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$. Show that if the x_is' are equally spaced (i.e. $x_i = u + iv$ for fixed values of u and v), then $y_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + e_i$ is an equivalent reparametrization (in the sense that both the design matrices have the same column space). 15

Q. 8(a) विचारिए माध्य सदिश $\underset{\sim}{\mu}$ और परिक्षेपण आव्यूह Σ वाले p-आयामी प्रसामान्य समष्टि से, एक यादृच्छिक प्रतिदर्श $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots\ldots \underset{\sim}{x}_n$ । समस्या का प्रयोजन $H_0 : \Sigma = \sigma^2 I_p$ के परीक्षण के लिए संभाव्य अनुपात परीक्षा (LRT) का निर्माण करना है। μ और σ^2 के महत्तम संभाव्य आकलक (MLE) को निकालिए। $-2\log_e \wedge$ के लिए व्यंजक, p, n, $\underset{\sim}{\overline{X}}$ और प्रतिदर्श सहप्रसरण आव्यूह S के अवयवों के पदों में, लिखिए।

Consider a random sample $\underset{\sim}{x}_1, \underset{\sim}{x}_2, \ldots\ldots \underset{\sim}{x}_n$ from a p-dimensional normal population with mean vector $\underset{\sim}{\mu}$ and dispersion matrix Σ. The purpose of the problem is to construct the likelihood ratio test (LRT) for testing $H_0 : \Sigma = \sigma^2 I_p$. Find the maximum likelihood estimate (MLE) of μ and σ^2. Write down the expression for $-2\log_e \wedge$ in terms of p, n, $\underset{\sim}{\overline{X}}$ and the elements of the sample covariance matrix S. 20

Q. 8(b) बहु-उपादानी प्रयोग में संकरण का क्या तात्पर्य है ? संकरित प्रभावों पर सूचनाओं के हानि के मूल्य पर भी संकरण क्यों प्रयुक्त होता है ? 'पूर्ण संकरण' और 'आंशिक संकरण' पदों को समझाइये।

What is meant by confounding in a factorial experiment ? Why is confounding used even at the cost of loss of information on the confounded effects ? Explain the terms 'complete confounding' and 'partial confounding'. 15

Q. 8(c) समष्टि के N गुच्छों से, n गुच्छों, जिनमें प्रत्येक में M तत्व हैं, का एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श चुना जाता है और चयनित गुच्छे पूर्णत: परिगणित किये जाते हैं। समष्टि माध्य प्रति तत्व के लिए एक आकलक सुझाइये और प्रस्तावित आकलक के प्रसरण के लिए, समष्टि के अन्त:वर्ग (इन्ट्राक्लास) सहसम्बन्ध गुणांक के पदों में, व्यंजक व्युत्पन्न कीजिए।

A simple random sample of n clusters, each containing M elements, is drawn from the N clusters of the population and the clusters sampled are enumerated completely. Suggest an unbiased estimator of the population mean per element and derive the expression for the variance of the proposed estimator in terms of the population intraclass correlation coefficient. 15